2018年　東大文系数学　第1問①

(1)

$C: y=x^2-3x+4$ に接する直線 l, m を求める。

$f(x)=x^2-3x+4$ とすると

$f'(x)=2x-3$ なので

$(t, f(t))$ での接線は

$y-f(t)=f'(t)(x-t)$

$\Leftrightarrow\quad y=(2t-3)(x-t)+t^2-3t+4$ ①

これが原点を通るので

$0=(2t-3)(0-t)+t^2-3t+4$

$t^2-4=0$

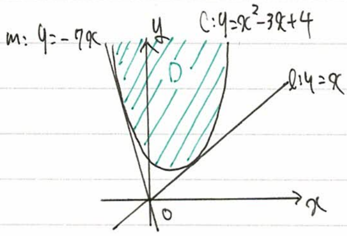
$t=\pm 2$

①に $t=2$ を代入し $y=x$

①に $t=-2$ を代入し $y=-7x$

$l: y=x$　$m: y=-7x$ とする。

このときの図は



C上の点 $(s, f(s))$ に対して

L は $y=x \Leftrightarrow x-y=0$ と (s, s^2-3s+4) の距離なので

$$L=\frac{|s-(s^2-3s+4)|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|-s^2+4s-4|}{\sqrt{2}}=\frac{(s-2)^2}{\sqrt{2}}$$

M は $y=-7x \Leftrightarrow 7x+y=0$ と (s, s^2-3s+4) の距離なので

$$M=\frac{|7s+s^2-3s+4|}{\sqrt{7^2+1^2}}=\frac{|s^2+4s+4|}{5\sqrt{2}}=\frac{(s+2)^2}{5\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{L}+\sqrt{M}=\sqrt{\frac{(s-2)^2}{\sqrt{2}}}+\sqrt{\frac{(s+2)^2}{5\sqrt{2}}}=\frac{|s-2|}{\sqrt[4]{2}}+\frac{|s+2|}{\sqrt{5}\times\sqrt[4]{2}}$$

$\sqrt{x^2}=|x|$

$s\geqq 2$ の時

$$\sqrt{L}+\sqrt{M}=\frac{1}{\sqrt{5}\times\sqrt[4]{2}}\left(\sqrt{5}s-2\sqrt{5}+s+2\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}\times\sqrt[4]{2}}\left\{\underbrace{(\sqrt{5}+1)}_{\text{傾き正}}s-2\sqrt{5}+2\right\}$$

$-2\leqq s\leqq 2$ の時

$$\sqrt{L}+\sqrt{M}=\frac{1}{\sqrt{5}\times\sqrt[4]{2}}\left(-\sqrt{5}s+2\sqrt{5}+s+2\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt[4]{2}}\left\{\underbrace{(1-\sqrt{5})}_{\text{傾き負}}s+2\sqrt{5}+2\right\}$$

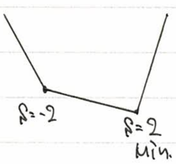
$s\leqq -2$ の時

$$\sqrt{L}+\sqrt{M}=\frac{1}{\sqrt{5}\times\sqrt[4]{2}}\left(-\sqrt{5}s+2\sqrt{5}-s-2\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}\times\sqrt[4]{2}}\left\{\underbrace{(-1-\sqrt{5})}_{\text{傾き負}}s+2\sqrt{5}-2\right\}$$

以上より　$s\leqq -2$ で傾き負、$-2\leqq s\leqq 2$ で傾き負、$2\leqq s$ で傾き正なので

$\sqrt{L}+\sqrt{M}$ の最小値は $s=2$ でとる。



よって、点Aの座標は

$(2, f(2))$

$=(2, 2)$ //